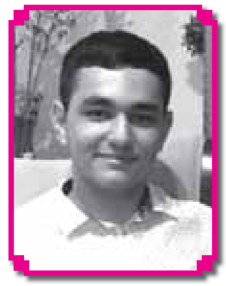
# روش تقریب جذر عددها به کمک نامساوی حسابی ـ هندسی



**حسین قاسم دامغانی**
دانش‌آموز فارغ‌التحصیل پیش‌دانشگاهی

جـذر یک عدد، از آشـناترین و پرکاربردترین مفهوم‌های ریاضی است و در محاسبهٔ وتر مثلث قائم‌الزاویه، حل معادلهٔ درجهٔ دو و مسائل بسیار دیگر کاربرد دارد. جذر برای هر عدد نامنفی N به این صورت تعریف می‌شود: جذر N، عددی نامنفی مانند M است، اگر و تنها اگر: N=M×M.

برای مثال، ۵ جذر عدد ۲۵ است، زیرا: ۵×۵=۲۵. یا ۱۳ جذر عدد ۱۶۹ است و همچنین ۱ جذر عدد ۱ است. اما در اکثر موارد، جذر یک عدد، عددی طبیعی و یا گویا نیست، بلکه عددی گنگ است؛ مانند جذر عدد ۳ که در حدود ۱/۷۳۲۰۵۰ می‌شود. برای نمایش دقیق جذر ۳ از $\sqrt{3}$ استفاده می‌کنند.

گاه محاسبهٔ جذر یـک عدد آن هـم بدون ماشین‌حساب، طولانی و خسته کننده می‌شود. اما با استفاده از نامساوی معروف $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$ می‌تـوان به نحوی مقدار جذر یـک عدد را با دقت بالایی تخمین زد. ابتدا خود نامسـاوی را اثبات می‌کنیم (a و b هر دو نامنفی‌اند).

می‌دانیم که مجذور هر عدد، عددی نامنفی است پس با مجذور کردن عدد a-b داریم:

$$(a-b)^2 \ge 0 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \ge 0$$
$$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 - 4ab \ge 0$$
$$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 \ge 4ab \Rightarrow (a+b)^2 \ge 4ab$$
$$\Rightarrow a+b \ge 2\sqrt{ab} \Rightarrow \frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$$

حال فرض کنید که می‌خواهیم جذر عددی مانند a را حساب کنیـم که مربع کامل نیسـت و b یک مربع کامـل غیرصفر و برابر $k^2$ اسـت (k عددی طبیعی اسـت). با جای‌گذاری $k^2$ به جای b در نامساوی و استفاده از قوانین جذر و نامساوی داریم:

$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} \overset{b=k^2}{\Rightarrow} \frac{a+k^2}{2} \ge \sqrt{ak^2}$$
$$\Rightarrow \frac{a+k^2}{2} \ge k\sqrt{a} \Rightarrow \frac{a+k^2}{2k} \ge \sqrt{a}$$

بنابراین مقدار تخمینی ما $\frac{a+k^2}{2k}$ خواهد بود.

حال برای دقیق شـدن این تخمیـن باید بهترین عدد ممکن را برای k پیدا کنیم. از آنجا که شـرط برقراری تسـاوی در نامسـاوی یاد شـده در ابتدای مطلب، برابری a و b اسـت (اثبات آن به راحتی امکان‌پذیر اسـت)، پس برای نزدیک شدن به تساوی باید به یکی از عددهای مربع کامل قبل و یا بعد a رسید. علت این موضوع را چنین می‌توان بیان کرد که فرض کنید، نامساوی زیر برقرار باشد (z عددی طبیعی و بزرگ‌تر از ۲ است):

$$(z-2)^2 < (z-1)^2 < a < z^2 < (z+1)^2$$

اگر در انتخاب k مناسـب به جای z از z+1 استفاده شود، آن‌گاه تخمین نادقیق‌تر می‌شود، زیرا:

$$\frac{a+(z+1)^2}{2(z+1)} \ge \frac{a+z^2}{2z}$$

و چون حاصل تخمین ما به علت نامساوی از مقدار واقعی بزرگ‌تر اسـت، پس باید کوچک‌ترین تخمین را محاسبه کرد. برای اثبات به راحتی دو کسر را از هم کم می‌کنیم و با بهره‌گیری از فرض $a<z^2$ و $z>0$، صحت نامساوی مشخص می‌شود. پس به راحتی با استقرا ثابت می‌شود که از z+1، z+2 و ... نباید استفاده کرد.

همچنین، اگر در انتخاب k مناسب، به جای z-1 از z-2 استفاده شود، آن‌گاه تخمین نادقیق‌تر می‌شود (اثبات آن هم مانند اثبات قبلی اسـت) و به راحتی با استقرا ثابت می‌شـود که از z-2، z-3 و... نباید استفاده کرد. پس باید بین z و z-1 یکی را انتخاب کنیم و برای این کار بررسی می‌کنیم در چه شرایطی کدام بهتر است. فرض کنید در یک موقعیت، انتخاب z از z-1 بهتر اسـت. بنابراین حاصل تخمین با z-1، بزرگ‌تر از حاصل آن با z است و داریم:

$$\frac{a+(z-1)^2}{2(z-1)} \ge \frac{a+z^2}{2z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{az+z^3-2z^2+z}{2(z-1)(z)} \geq \frac{az-a+z^3-z^2}{2(z-1)(z)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{az+z^3-2z^2+z-(az-a+z^3-z^2)}{2(z-1)(z)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-z^2+z+a}{2(z-1)(z)} \geq 0 \Leftrightarrow -z^2+z+a \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a \geq z^2-z \Leftrightarrow a \geq z(z-1) \overset{z^2 \geq a}{\Leftrightarrow} z^2 \geq a \geq z(z-1)$$

چون تمام مراحل بازگشت‌پذیر اســـت، پس هنگامی که داریم: $z^2 \geq a \geq z(z-1)$، باید از z اســـتفاده کرد و به ســـادگی می‌توان نشـــان داد، زمانی که داریـــم: $z(z-1) \geq a \geq (z-1)^2$، باید از z-1 استفاده کرد. البته اگر داشته باشیم: $a = z(z-1)$، فرقی بین استفاده از z و z-1 وجـــود نـــدارد (حاصل تخمین ما در هـــر دو حالت برابر می‌شود). پس در جمع‌بندی برای تخمین جذر عددی مانند a، تابع زیر را می‌توان معرفی کرد: z همان کوچک‌ترین مربع کامل بزرگ‌تر مســـاوی a است و برای سادگی تابع از $\lceil \sqrt{a} \rceil^2$ استفاده نشده است. ( $\lceil \; \rceil$ علامت ســـقف است و برای هر عدد، کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر مساوی آن است. مثلاً سقف ۵/۷، عدد ۶ و سقف ۸/۲- عدد ۸- است.)

$$\sqrt{a} \approx \begin{cases} \frac{a+z^2}{2z}, & z(z-1) \leq a \leq z^2 \\ \frac{a+(z-1)^2}{2(z-1)}, & (z-1)^2 \leq a \leq z(z-1) \end{cases}$$

یا

$$\sqrt{a} \approx \min\left(\frac{a+z^2}{2z}, \frac{a+(z-1)^2}{2(z-1)}\right)$$

حال برای شفاف‌سازی بیشتر مطلب به ارائهٔ مثال می‌پردازیم: فرض کنید می‌خواهید جذر عدد ۵۱ را حســـاب کنید. می‌دانیم که: ۸۱>۶۴>۵۱>۴۹>۳۶. اگر تخمین جذر ۵۱ را با هر کدام از مربع کامل‌ها امتحان کنیم، نتایج زیر به‌دست می‌آید:

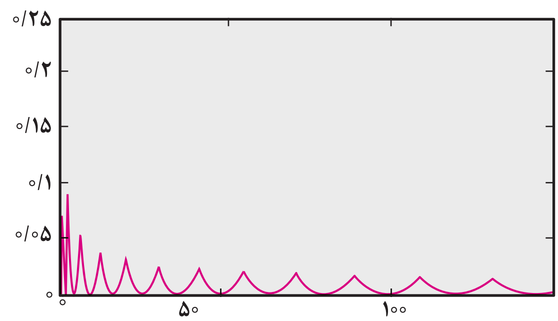
| | k=۶ | k=۷ | k=۸ | k=۹ | جذر ۵۱ |
|---|---|---|---|---|---|
| محاسبه | $\frac{51+6^2}{2\times 6}$ | $\frac{51+7^2}{2\times 7}$ | $\frac{51+8^2}{2\times 8}$ | $\frac{51+9^2}{2\times 9}$ | $\sqrt{51}$ |
| حاصل | ۷/۲۵ | ...۷/۱۴۲۸۵۷ | ۷/۱۸۷۵ | ...۷/۳۳۳۳۳۳ | ...۷/۱۴۱۴۲۸ |

پس طبق تابع، چون داریم ۷×۸>۵۱>۴۹، باید از k=۷ استفاده می‌شد که بهترین تخمین را ارائه می‌دهد و با مقدار واقعی در حدود ۰/۰۰۱۴ اختلاف دارد.

بـــرای مثـــال دیگر، جـــذر ۱۳۷ را محاســـبه می‌کنیـــم. چون داریـــم: ۱۴۴>۱۳۷>۱۲×۱۱>۱۲۱، پـــس تخمین برابر اســـت با: $\frac{137+144}{2\times 12} = \frac{281}{24} = 11/70833...$ کـــه با مقدار واقعـــی در حدود ۰/۰۰۳۶ تفاوت دارد.

حال نگاهی به شـــکل تابـــع **میزان خطای تخمین** می‌اندازیم.
(خطا = تابع تخمین - مقدار واقعی)

همان‌طور که مشـــاهده می‌شود، با بزرگ شـــدن X ، روند کلی خطا رو به صفر می‌رود و همان‌طور که قبلاً هم گفتیم، هرچه از مربع کامل دور می‌شویم، تخمین نادقیق‌تر می‌شود و نقطهٔ تلاقی دو مقدار تخمین، در میانگین هندســـی دو مربـــع کامل بعد و قبل از عدد رخ می‌دهد. همچنین در این نقاط با بیشترین خطا مواجه می‌شویم. برای کاهش خطا به عبارت $z(z-1)$ نگاهی دوباره می‌اندازیم:




$$z(z-1) = ((z-\frac{1}{2})+\frac{1}{2})((z-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}) = (z-\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2$$

$$4(z(z-1)) = 4((z-\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2) = 2(z-1)^2 - 1$$

بنابراین اگر آن عبارت را ۴ برابر کنیم (که ۴ مربع کامل اســـت)، فقـــط ۱ واحد تا مربع کامل بعدی فاصله داریـــم. از این قضیه برای تخمین دقیق‌تر این‌گونه عددها می‌توان اســـتفاده کرد. پس اگر جذر عددی مانند ۵×۶=۳۰ را بخواهیم تخمین بزنیم، از روش قبلی استفاده نمی‌کنیم و به جای آن از قوانین جذر اســـتفاده می‌کنیم تا تخمین بهتری به دست آوریم:

$$\sqrt{30} = \frac{\sqrt{4\times 30}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{120}}{2} \approx \frac{\frac{120+121}{2\times 11}}{2} = \frac{241}{44} = 5/477272...$$

که اختـــلاف آن با مقدار واقعی در حدود ۰/۰۰۰۰۵ اســـت. در صورتی که اگر با روش قبلی محاســـبه می‌کردیم، این عبارت حاصل می‌شد: $5/5 = \frac{11}{2} = \frac{55}{10} = \frac{30+25}{2\times 5} = \frac{66}{12} = \frac{30+36}{2\times 6}$ که در حدود ۰/۰۲۳ خطا داشـــت (اما همان تخمیـــن اولیه هم تا حد قابل قبولی مناسب است و واجب نیست مرحلهٔ دوم را نیز حتماً انجام دهیم). در مثال هم نشان داده شد، اگر عدد ما میانگین هندسی دو مربع کامل قبل و بعد از خود بود، حاصل استفاده از z یا z-1 برابر می‌شود.

حال ممکن است جذر عددهای بزرگ‌تری مانند ۷۳۷۳ را بخواهیم حساب کنیم که حدس مربع کامل قبل و بعد از آن کمی دشوار خواهد شد. برای تخمین جذر عددهای بزرگ، با قوانین جذر، مقدار تخمین زنی جذر را کاهش می‌دهیم (مثلاً با تقسیم بر مربعات توان‌های ۱۰) و سپس تخمین می‌زنیم. برای مثال، برای تخمین جذر ۷۹۷۳ داریم (خطا: ۰/۰۰۲۷):

$$\sqrt{۷۹۷۳}=\sqrt{۱۰۰}\times\sqrt{\frac{۷۹۷۳}{۱۰۰}}$$

$$=۱۰\times\sqrt{۷۹/۷۳}\overset{۶۴<۷۲<۷۹/۷۳<۸۱}{\approx}۱۰\times\frac{۷۹/۷۳+۸۱}{۲\times۹}$$

$$=۸۹/۲۹۴۴۴...$$

اگر بخواهیم از این دقیق‌تر هم جذر عددهای بزرگ را تخمین بزنیم، کافی است به جزء صحیح تخمین قبلی خود نگاهی بیندازیم و از آن برای «عدد مربع کامل قبلی» استفاده کنیم. در همین مثال، جذر تقریبی اولیهٔ ما ...۸۹/۲۹۴۴۴ است. پس عدد مربع کامل قبل از ۷۹۸۳، عدد $۸۹^۲=۷۹۲۱$ خواهد بود (در اعداد بزرگ‌تر، به علت خطای تخمین، ممکن است جزء صحیح تخمین اولیه دقیقاً مربع کامل قبل از عدد موردنظر نباشد، بلکه کمی اختلاف داشته باشد). داریم:

$۸۰۱۰=۹۰\times۸۹$

پس: $۸۹^۲<۷۹۸۳<۹۰\times۸۹<۹۰^۲$

حال برای تخمین هرچه قدر دقیق‌تر جذر ۷۹۸۳ از $k=۸۹$ استفاده می‌کنیم:

$$\sqrt{۷۹۸۳}\approx\frac{۷۹۸۳+(۸۹)^۲}{۲\times۸۹}=۸۹/۲۹۲۱۳۴...$$

که تفاوت آن با مقدار واقعی در حدود ۰/۰۰۰۴ است. اما تخمین اولیه مقدار بزرگ‌تری را نشان می‌دهد که خود نشانگر دقیق‌تر بودن تخمین دوم است. (اما همان تخمین اولیه هم تا حد قابل قبولی مناسب است و واجب نیست مرحلهٔ دوم را نیز حتماً انجام دهیم.)

برای تمرین، جذر عددهای ۵۳۹۱، ۶۰۱ و ۲ را با روش تقریبی محاسبه و با مقدار واقعی مقایسه کنید.

### برای علاقه‌مندان: قدمی فراتر

این قسمت از سرعت تخمین می‌کاهد، اما در عوض آن را دقیق‌تر می‌کند.

به نامساوی‌های اولیه باز گردیم:

$$\frac{a+b}{۲}\ge\sqrt{ab}\overset{b=k^۲}{\Rightarrow}\frac{a+k^۲}{۲}\ge\sqrt{ak^۲}$$

$$\Rightarrow\frac{a+k^۲}{۲}\ge k\sqrt{a}\Rightarrow\frac{a+k^۲}{۲k}\ge\sqrt{a}$$

اگر این‌بار فرض کنیم k فقط محدود به عددهای طبیعی نیست و آن را به عددهای گویای مثبت گسترش دهیم، می‌توانیم از نامساوی تخمین $(\frac{a+k^۲}{۲k})$ بارها و بارها استفاده کنیم تا به دقیق‌ترین جواب برسیم:

به فرض شما می‌خواهید جذر ۳ را حساب کنید. چون: $۱<۱\times۲<۳<۴$، پس تخمین اولیه چنین خواهد بود (خطا: ۰/۰۱۸) $\frac{۷}{۴}=\frac{۳+۴}{۲\times۲}$. اگر $\frac{۷}{۴}$ را دوباره به عنوان k برگزینیم، تخمین دوم ما چنین می‌شود:

$$\frac{۳+(\frac{۷}{۴})^۲}{۲\times\frac{۷}{۴}}=\frac{\frac{۳\times۱۶+۴۹}{۱۶}}{\frac{۷}{۲}}=\frac{۴۸+۴۹}{۵۶}=\frac{۹۷}{۵۶}$$

که خطای ۰/۰۰۰۰۹ دارد. اگر باز از تخمین قبلی به عنوان k استفاده کنیم، میزان خطا به $۲\times۱۰^{-۹}$ کاهش می‌یابد و در استفاده‌های بعدی، خطا به کمتر از $۱۰^{-۱۵}$ می‌رسد!

و یا به فرض می‌خواهید جذر $\frac{۱۳}{۸}$ را حساب کنیم، به سادگی متوجه می‌شویم که:

$$\frac{۱۳}{۸}=\frac{۲۶}{۱۶}=\frac{۲۵}{۱۶}+\frac{۱}{۱۶}=(\frac{۵}{۴})^۲+\frac{۱}{۱۶}$$

پس بدون اینکه سراغ عددهای طبیعی برای k برویم، یا صورت و مخرج را جدا جدا تخمین جذری بزنیم، از $\frac{۵}{۴}$ استفاده می‌کنیم و تخمین ما چنین خواهد بود (خطا: ۰/۰۰۰۲)

$$\frac{\frac{۱۳}{۸}+(\frac{۵}{۴})^۲}{۲\times\frac{۵}{۴}}=\frac{\frac{۲۶+۲۵}{۱۶}}{\frac{۵}{۲}}=\frac{۵۱}{۴۰}$$

در صورت استفاده از عدد طبیعی داریم (خطا: ۰/۰۳۷)

$$۱<\frac{۱۳}{۸}<۱\times۲<۴\Rightarrow\sqrt{\frac{۱۳}{۸}}=\frac{\frac{۱۳}{۸}+۱}{۲\times۱}=\frac{۲۱}{۱۶}=۱/۳۱۲۵$$

در صورت استفاده از تقریب صورت و مخرج به‌طور جدا خواهیم داشت (خطا: ۰/۰۰۴۶):

$$\sqrt{\frac{۱۳}{۸}}=\frac{\sqrt{۱۳}}{\sqrt{۸}}=\frac{\frac{۱۳+۱۶}{۲\times۴}}{\frac{۸+۹}{۲\times۳}}=\frac{\frac{۲۹}{۸}}{\frac{۱۷}{۶}}=\frac{۶\times۲۹}{۸\times۱۷}=\frac{۳\times۲۹}{۴\times۱۷}$$

$$=\frac{۸۷}{۶۸}=۱/۲۷۹۴۱۱$$

به‌عنوان تمرین این قسمت، جذر عدد ۲ را (با یکبار تکرار) و یکبار با توجه به اینکه $۲=\frac{۴۹}{۲۵}+\frac{۱}{۲۵}$ محاسبه کنید و با مقدار واقعی مقایسه کنید.